Секция: ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ВКЛЮЧЕНИЯ

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

© А.И. Булгаков, А.И. Полянский

Пусть $C^n[a,b]$ пространство непрерывных функций $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ с нормой $||x||_{C^n[a,b]} = \max\{|x(t)| : t \in [a,b]\}$. Пусть $\mathcal{U} \subset [a,b]$ – измеримое множество, $\mu(\mathcal{U}) > 0$ (μ – мера Лебега), обозначим $L^n(\mathcal{U})$ – пространство суммируемых функций $x : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ с нормой $||x||_{L^n(\mathcal{U})} = \int_{\mathcal{U}} |x(s)|ds$. Далее $D^n[a,b]$ – пространство абсолютно непрерывных функций с нормой $||x||_{D^n[a,b]} = |x(a)| + ||\dot{x}||_{L^n[a,b]}$. Обозначим через $C^1_+[a,b]$ – конус неотрицательных функций пространства $C^1[a,b]$. Далее пусть $\mathcal{C}\ell(L^n)$ множество всех непустых замкнутых ограниченных суммируемыми функциями подмножеств пространства $L^n[a,b]$.

Если $\Phi \subset L^n[a,b]$, то через $\overline{\text{sw}}\Phi$ обозначим замыкание в пространстве $L^n[a,b]$ множества всевозможных комбинаций вида $y = \chi(\mathcal{U}_1)x_1 + \chi(\mathcal{U}_2)x_2 + \ldots + \chi(\mathcal{U}_m)x_m$ элементов $x_i \in \Phi$, $i = 1,2,\ldots m$, в которых $\mathcal{U}_i \subset [a,b]$, $i = 1,2,\ldots m$ – непересекающиеся измеримые множества, удовлетворяющие условию $\bigcup\limits_{i=1}^{m} \mathcal{U}_i = [a,b]$.

Рассмотрим однородную линейную краевую задачу для функционально-дифференциального уравнения

$$\mathcal{L}x = 0, \; lx = 0, \tag{1}$$

где $\mathcal{L} : D^n[a,b] \to L^n[a,b]$ – линейный непрерывный оператор, $l : D^n[a,b] \to \mathbb{R}^n$ – линейный непрерывный вектор-функционал.

Предположим, что для задачи (1) (см. [1]) существует непрерывный оператор Грина $G : L^n[a,b] \to D^n[a,b]$, определенный равенством

$$(Gz)(t) = \int_a^b G(t,s)z(s)ds, \quad t \in [a,b]. \tag{2}$$

Рассмотрим квазилинейную краевую задачу для функционально-дифференциального включения

$$\mathcal{L}x \in \Phi(x), \quad lx \in \varphi(x), \tag{3}$$

где $\varphi : C^n[a,b] \to \text{comp}[\mathbb{R}^n]$, $\Phi : C^n[a,b] \to \mathcal{C}\ell(L^n)$ непрерывные отображения. Задача (3) эквивалентна интегральному включению

$$x \in X\varphi(x) + G\Phi(x),$$

где X – фундаментальная матрица решений первого уравнения в (1), удовлетворяющая условию $l(X) = E$, $G : L^n[a,b] \to D^n[a,b]$ – оператор Грина, определенный соотношением (2).

Определение. Под *обобщенным решением задачи* (3) будем понимать абсолютно непрерывную функцию $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющую включениям

$$\mathcal{L}x \in \overline{\text{sw}}\Phi(x), \quad lx \in \varphi(x).$$

В работе [2] изучалась квазилинейная краевая задача для функционально-дифференциального включения при предположении, что образы отображения $\varphi : C^n[a,b] \to \text{comp}[\mathbb{R}^n]$ выпуклы. В [2] были получены оценки близости обобщенного решения краевой задачи (3) к наперед заданной непрерывной функции. В данном докладе получены оценки, аналогичные оценкам в [2], без предположения выпуклости значений оператора $\varphi : C^n[a,b] \to \text{comp}[\mathbb{R}^n]$.

Пусть $q \in C^n[a,b]$, $r \in \varphi(q)$ и $\omega \in L^n[a,b]$. Представим функцию q в виде

$$q = Xr + G\omega + e, \tag{4}$$

где $e = q - Xr - G\omega$. Далее предположим, что функция $k \in L^1[a,b]$ для любого измеримого множества $\mathcal{U} \in [a,b]$ удовлетворяет неравенству

$$\rho_{L^n(\mathcal{U})}[\omega; \Phi(q)] \leq \int_{\mathcal{U}} k(s)ds, \tag{5}$$

а непрерывная функция $v : [a,b] \to [0,\infty)$ определена равенством

$$v(t) = \int_a^b |G(t,s)|k(s)ds + |e(t)|, \tag{6}$$

где $|G(t,s)|$ – согласованная с пространством $\mathbb{R}^n$ норма $n \times n$ матрицы $G(t,s)$ в представлении (2), e – функция в правой части равенства (4), функция $k \in L^1[a,b]$ удовлетворяет неравенству (5).

О п р е д е л е н и е. Будем говорить, что оператор Грина $G : L^n[a,b] \to D^n[a,b]$ и отображения $\varphi : C^n[a,b] \to \text{comp}[\mathbb{R}^n]$, $\Phi : C^n[a,b] \to \mathcal{C}\ell(L^n)$ обладают *свойством* $\mathcal{A}$, если найдется функция $\beta \in L^1[a,b]$ такая, что для любых $x, y \in C^n[a,b]$ и любого измеримого множества $\mathcal{U} \in [a,b]$ выполняются соотношения

$$h_{L^n(\mathcal{U})}[\Phi(x); \Phi(y)] \leq ||x - y||_{C^n[a,b]} \int_{\mathcal{U}} \beta(s)ds, \tag{7}$$

найдется такое число $\alpha \geq 0$, что для любых $x, y \in C^n[a,b]$ справедливо

$$h[\varphi(x); \varphi(y)] \leq \alpha ||x - y||_{C^n[a,b]}, \tag{8}$$

для функции $\beta \in L^1[a,b]$ и числа $\alpha \geq 0$ справедливо соотношение

$$\max_{t \in [a,b]} \int_a^b |G(t,s)|\beta(s)ds + \alpha\lambda < 1, \tag{9}$$

где

$$\lambda = \max\{|X(t)| : \ t \in [a,b]\} \tag{10}$$

Пусть непрерывный оператор $\mathcal{B} : C^1_+[a,b] \to C^1_+[a,b]$ имеет вид

$$(\mathcal{B}z)(t) = \left(\int_a^b |G(t,s)|\beta(s)ds + \alpha\lambda \right) ||z||_{C^1[a,b]}.$$

Далее, предположим, что функция $v : [a,b] \to [0,\infty)$ определена равенством (6). Рассмотрим ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{B}^i v, \quad \mathcal{B}^0 v = v \quad \mathcal{B}^i v = \mathcal{B}(\mathcal{B}^{i-1} v), \quad i = 1, 2, \dots \ . \tag{11}$$

Отметим, что если выполнено условие (9), то ряд (11) сходится в пространстве $C^1[a,b]$. Пусть ряд (11) сходится и $\xi(v)$ – сумма ряда (11), то есть

$$\xi(v) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{B}^i v. \tag{12}$$

Т е о р е м а. *Пусть оператор Грина $G : L^n[a,b] \to D^n[a,b]$ и отображения $\varphi : C^n[a,b] \to \text{comp}[\mathbb{R}^n]$, $\Phi : C^n[a,b] \to \mathcal{C}\ell(L^n)$ обладают свойством $\mathcal{A}$ и пусть функция q представима равенством* (4)*. Тогда найдется такое обобщенное решение задачи* (3)*, для которого выполняются следующие оценки:*

1) *при любом* $t \in [a,b]$ *выполняется* $|x(t) - q(t)| \leq \xi(v)(t)$

2)$||X(r - lx)||_{C^n[a,b]} \leq \lambda\alpha||\xi(v)||_{C^1[a,b]}$

3) *при п. в.* $t \in [a,b]$ *справедливо* $|(\mathcal{L}x)(t) - \omega(t)| \leq k(t) + \beta(t)||\xi(v)||_{C^1[a,b]}$,
где функции $v, \xi(v), \lambda$ *определены соотношениями* (6), (12), (10), *число* α *и функции* k, β *удовлетворяют неравенствам* (8), (5), (7) *соответственно.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 384 с.

2. *Булгаков А. И., Панасенко Е. А.* Квазилинейные краевые задачи для функционально-дифференциальных включений // Известия Института математики и информатики. Ижевск, 2006. № 2(36). С. 13 – 16.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант № 04-01-00324) и Норвежского комитета по развитию университетской науки и образования – NUFU (проект № PRO 06/02).

Поступила в редакцию 8 ноября 2006 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ВКЛЮЧЕНИЯ С ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ

© **А.И. Булгаков, Д.Н. Протасов, О.В. Филиппова**

Обозначим comp $[\mathbb{R}^n]$ множество всех непустых компактов пространства $\mathbb{R}^n$; $\rho[\cdot,\cdot]$ – расстояние между точкой и множеством и $h[\cdot,\cdot]$ – расстояние между множествами пространства $\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим дифференциальное включение с импульсными воздействиями

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)),\ t \in [a,b] \setminus \{t_0\}.\ (t_0 \in (a,b)),\ x(a) = x_0,\ \Delta x(t_0) = \beta,\ (x_0, \beta \in \mathbb{R}^n), \tag{1}$$

где $\Delta x(t_0) = x(t_0^+) - x(t_0^-)$, $x(t_0^+) = \lim\limits_{h \to 0_+} x(t_0 + h)$, $x(t_0^-) = \lim\limits_{h \to 0_+} x(t_0 - h)$.

Будем предполагать, что отображение $F : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to$ comp $[\mathbb{R}^n]$ удовлетворяет следующим условиям: при всех $x \in \mathbb{R}^n$ отображение $F(\cdot, x)$ измеримо; существует суммируемая функция $l : [a,b] \to [0,\infty)$, что для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ при почти всех $t \in [a,b]$ выполняется равенство

$$h[F(t,x); F(t,y)] \leqslant l(t)|x - y|;$$

функция $||F(t,0)|| : [a,b] \to [0,\infty)$, определенная равенством

$$||F(t,0)|| = \sup_{y \in F(t,0)} |y|,$$

суммируема.

Под решением задачи (1) понимаем функцию $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ абсолютно непрерывную на каждом из отрезков $[a, t_0]$, $(t_0, b]$, для которой существует такая суммируемая функция $q : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, что